Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS MAROQUINERIE • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot en freinage (12 questions) **Page 3**

2. Transformées de Laplace d'un système électrique entrée-sortie (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmaroquinerie.fr/assets/annales/bts-maroquinerie/E2 - Mathématiques/2022/BTS Maroquinerie - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot en freinage

Un chariot de fête foraine, lancé à 20 m·s⁻¹, est ralenti par un système de freinage dont la vitesse est modélisée par une fonction vérifiant une équation différentielle. L'exercice étudie cette fonction, la distance parcourue et son développement limité au voisinage de zéro.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 sur l'intervalle considéré.

La formule fournie donne, pour une équation de la forme $y' + ay = 0$, les solutions $y(t) = ke^{-at}$. Ici, $a = 0,8$. La constante k est réelle et peut être choisie librement. Ces solutions sont définies sur tout l'intervalle $[0; +\infty[$, comme demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Vérifier que la fonction constante g(t) = 5 est une solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ a pour dérivée $g'(t) = 0$. En la substituant dans le membre de gauche de l'équation, on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Cette égalité est vérifiée pour tout t de l'intervalle. La fonction proposée est donc bien une solution de l'équation différentielle complète.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g'(t) + 0,8g(t) = 4$, donc $g(t) = 5$ est une solution de (E).

Question 1.c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de (E). Les solutions de l'équation complète s'obtiennent en lui ajoutant les solutions de l'équation homogène associée, trouvées à la question précédente. La famille obtenue est définie et dérivable sur $[0; +\infty[$, et chaque membre vérifie bien $y' + 0,8y = 4$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale est $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. À $t = 0$, on a $e^0 = 1$, donc la condition initiale donne $5 + k = 20$, soit $k = 15$. En remplaçant k dans la solution générale, on obtient la fonction recherchée. Sa valeur à l'origine est bien $15 + 5 = 20$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ vaut 5.

Pour $t \geq 0$, la fonction est donnée par $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t}$ tend vers zéro. Le terme $15e^{-0,8t}$ tend lui aussi vers zéro. La limite de $f(t)$ est alors celle du terme constant restant.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe représentative C admet une asymptote et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et vaut 5. Une courbe représentative dont la fonction tend vers une limite finie L admet une asymptote horizontale d'équation $y = L$ en $+\infty$. Ici, on prend $L = 5$. La vitesse se rapproche donc de cette valeur lorsque le temps augmente.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale en $+\infty$: $y = 5$.

Question 2. À partir de l'expression fournie pour f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$ sur l'intervalle, donc f est strictement décroissante. Elle commence à $f(0) = 15 + 5 = 20$, puis tend vers 5 en $+\infty$. Le tableau de variation est donc :

t	0	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	$\searrow$ 5

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Le chariot s'arrêterait si sa vitesse atteignait zéro. Or $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$ et le terme exponentiel est positif à tout instant fini. La vitesse reste donc supérieure à 5, puis tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ lorsque t tend vers $+\infty$. Le modèle décrit un ralentissement qui se stabilise, et non un arrêt.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, et non vers zéro.

Question 4.a. Vérifier que F(t) = −18,75e^{−0,8t} + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. Par dérivation d'une composée, $(e^{-0,8t})' = -0,8e^{-0,8t}$. Ainsi, $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette dérivée est exactement l'expression donnée pour $f(t)$. La fonction F est donc une primitive de f sur $[0;+\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4.b. En utilisant l'intégrale de la vitesse entre deux instants, calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance parcourue est $d = \int_0^1 f(t)\,dt = F(1) - F(0)$. Or $F(1) = -18,75e^{-0,8} + 5$ et $F(0) = -18,75$. En soustrayant, on obtient $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$. L'évaluation numérique donne environ $15,3251$ mètres ; l'arrondi au centimètre s'effectue au centième de mètre.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m}$, soit $15,33\ \mathrm{m}$ au centimètre.

Partie C - Étude locale

Question 1. Choisir, parmi les propositions, l'expression correcte du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Le logiciel indique la partie régulière $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Dans un développement limité à l'ordre 2, le reste s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Il faut donc choisir la proposition qui conserve les trois termes affichés et ajoute un reste de cette forme. C'est la troisième proposition.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Troisième proposition : $20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse zéro est $y = f(0) + f'(0)t$. La valeur initiale est $f(0) = 15 + 5 = 20$. D'après l'expression fournie, $f'(0) = -12e^{0} = -12$. La tangente passe donc par le point $(0; 20)$ et son coefficient directeur vaut -12. En reportant ces deux valeurs dans l'équation de la droite, on obtient la tangente demandée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 20 - 12t$.

2. Transformées de Laplace d’un système électrique entrée-sortie

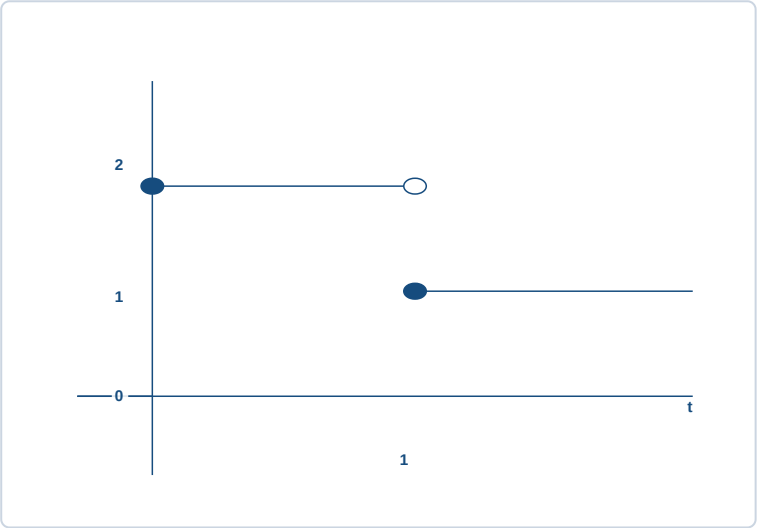
Un système électrique reçoit le signal causal e(t) = 2U(t) − U(t − 1) et possède la fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1). L’exercice porte sur le tracé du signal d’entrée, l’exploitation des transformées de Laplace pour déterminer le signal de sortie et l’étude de son comportement.

Partie A - Signal d’entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t).

Pour $t < 0$, le signal est nul. À partir de $t = 0$, $2U(t) = 2$, puis à $t = 1$, le terme $U(t-1)$ s’active et le signal vaut $2 - 1 = 1$. Comme $U(0) = 1$, le point de départ est plein en $(0; 2)$. Au changement de niveau, $(1; 2)$ est ouvert et $(1; 1)$ est plein.

Courbe du signal d’entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

$e(t) = 0$ si $t < 0$, $e(t) = 2$ si $0 \leq t < 1$, et $e(t) = 1$ si $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d’entrée.

Par linéarité, on transforme séparément les deux échelons de $e(t) = 2U(t) - U(t-1)$. Le formulaire donne $\mathcal{L}(U(t)) = 1/p$, puis $\mathcal{L}(U(t-1)) = e^{-p}/p$ par décalage d’une unité. En multipliant la première transformée par 2 et en soustrayant la seconde, on obtient directement l’expression de $E(p)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La transformée de Laplace du signal d’entrée est $E(p) = \dfrac{2 - e^{-p}}{p}$.

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] − [1/(p(p + 1))]e⁻ᵖ.

La relation du système est $S(p) = H(p)E(p)$. On y remplace $H(p)$ par $1/(p+1)$ et $E(p)$ par $(2 - e^{-p})/p$, obtenu à la question précédente.

$$S(p) = \frac{1}{p+1} \times \frac{2 - e^{-p}}{p} = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $S(p) = \dfrac{2}{p(p+1)} - \dfrac{e^{-p}}{p(p+1)}.$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p − 1/(p + 1).

On met au même dénominateur les deux fractions du membre de droite. Le numérateur se réduit à $(p+1) - p = 1$, ce qui donne bien le membre de gauche, pour les valeurs de p où les dénominateurs sont définis.

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{(p+1) - p}{p(p+1)} = \frac{1}{p(p+1)}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'identité est vérifiée : $\dfrac{1}{p(p+1)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}.$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de e⁻ᵖ/p et de e⁻ᵖ/(p + 1), en utilisant le formulaire fourni.

Les deux premières inverses se lisent directement dans le formulaire. Pour les deux suivantes, on applique le décalage d'une unité : si une fonction a pour transformée $F(p)$, alors $e^{-p}F(p)$ correspond à $f(t-1)U(t-1)$.

1. $\mathcal{L}^{-1}(1/p) = U(t)$.
2. $\mathcal{L}^{-1}(1/(p+1)) = e^{-t}U(t)$.
3. $\mathcal{L}^{-1}(e^{-p}/p) = U(t-1)$.
4. $\mathcal{L}^{-1}(e^{-p}/(p+1)) = e^{-(t-1)}U(t-1)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. En déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

En utilisant la décomposition de la question 2, la transformée se sépare en termes immédiats et en termes retardés par e^{-p}. Sur $[0;1[$, les fonctions retardées sont nulles puisque l'échelon $U(t-1)$ ne s'active qu'à partir de $t=1$. Il reste donc l'inverse de $2/p - 2/(p+1)$.

$$s(t) = 2U(t) - 2e^{-t}U(t) = 2(1-e^{-t}), \qquad 0 \le t < 1.$$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sur $[0;1[$, $s(t) = 2(1-e^{-t})$.

Question 5.a. Sachant que, sur [1 ; +∞[, s(t) = (e − 2)e⁻ᵗ + 1, calculer s(1), puis donner sa valeur exacte et une valeur approchée au dixième.

On évalue l'expression admise sur $[1;+[$ à $t=1$. En simplifiant le facteur $(e-2)e^{-1}$, on obtient la forme exacte. Puisque $e \approx 2{,}718$, le résultat arrondi au dixième est $1{,}3$.

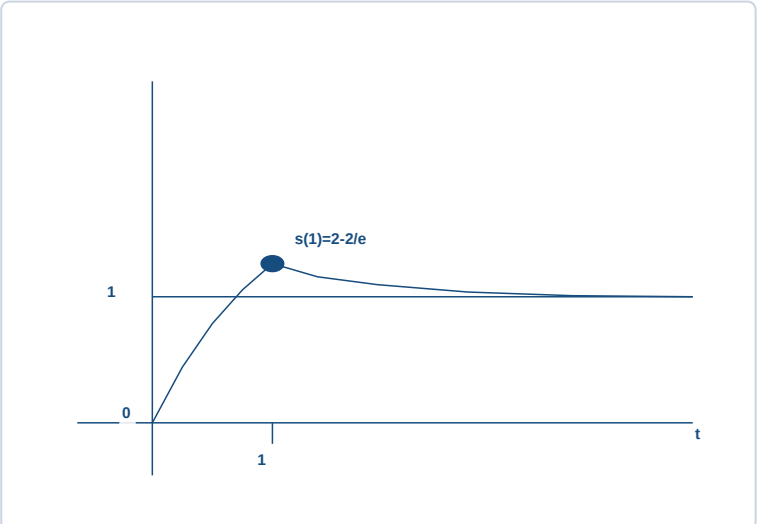
$$s(1) = (e-2)e^{-1} + 1 = 2 - \frac{2}{e}.$$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Valeur exacte : $s(1) = 2 - \dfrac{2}{e}$. Valeur approchée au dixième : $1{,}3$.

Question 5.b. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.

Sur $[0;1[$, la courbe suit $2(1-e^{-t})$ et part de $(0;0)$. Elle rejoint en $t=1$ la branche $1+(e-2)e^{-t}$, de valeur $2-2/e \approx 1{,}264$. Cette seconde branche décroît vers l'asymptote horizontale $s=1$. Les deux expressions donnent la même valeur en $t=1$, donc la courbe est raccordée en ce point.

Courbe représentative du signal de sortie s(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe part de $(0;0)$, passe par $(1;2-2/e)$, puis décroît vers l'asymptote horizontale $s=1$.

Question 5.c. Donner la limite de la fonction s(t) en +∞.

Pour $t \geq 1$, on a $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, e^{-t} tend vers zéro. Le terme $(e-2)e^{-t}$ tend donc également vers zéro, et il ne reste que la constante 1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +} s(t) = 1$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure 2 heures ; le coefficient est 1,5 en microtechniques et 2 en électrotechnique. Elle étudie le freinage d'un chariot puis un système électrique entrée-sortie. Les compétences évaluées sont les équations différentielles, l'analyse de fonctions, les primitives, les développements limités et les transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y' + ay = b$, la solution générale est la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière.
- Si $f(t)$ tend vers L en $+\infty$, la courbe de f admet l'asymptote horizontale d'équation $y = L$.
- La distance parcourue entre t_0 et t_1 est l'intégrale de la vitesse : $d = \int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt$.
- La transformée de Laplace de $U(t - a)$ est e^{-ap}/p ; le décalage temporel introduit un facteur exponentiel.

Points de vigilance & attentes du jury

- Utiliser la condition initiale pour déterminer la constante dans la solution de l'équation différentielle.
- Distinguer une vitesse qui tend vers zéro d'une vitesse qui tend vers une valeur positive : seule la première permet un arrêt dans ce modèle.
- Pour calculer une distance, évaluer la primitive aux deux bornes dans le bon ordre et arrondir au centimètre.
- Appliquer correctement le décalage temporel en transformée de Laplace et effectuer les tracés demandés sur le document-réponse.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment trouver la solution de l'équation différentielle du chariot ?

Résolvez d'abord l'équation homogène $y' + 0{,}8y = 0$, puis ajoutez une solution particulière de l'équation complète. La condition $f(0) = 20$ permet ensuite de déterminer la constante.

Q : Comment savoir si le chariot s'arrête avec le modèle donné ?

Examinez la limite de sa vitesse et vérifiez si elle atteint zéro. Ici, $f(t)$ tend vers 5 $m \cdot s^{-1}$: la vitesse reste positive à long terme, donc le modèle ne prévoit pas l'arrêt du chariot.

Q : Comment organiser le temps pendant cette épreuve ?

L'épreuve dure 2 heures et comporte deux exercices de 10 points. Répartissez le temps entre les deux, puis gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités et les tracés sur le document-réponse.

Q : Quels critères de présentation faut-il surveiller dans les calculs ?

Présentez les étapes utiles, utilisez les unités adaptées et distinguez valeur exacte et valeur approchée lorsqu'elles sont demandées. Pour les tracés, respectez les axes et les éléments fournis sur le document-réponse.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmaroquinerie.fr/assets/annales/bts-maroquinerie/E2 - Mathématiques/2022/BTS Maroquinerie - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Maroquinerie : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.