Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS Maroquinerie

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction** (12 questions) **Page 3**

2. **Séries de Fourier d'une fonction périodique paire** (10 questions) **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmaroquinerie.fr/assets/annales/bts-maroquinerie/E2 - Mathématiques/2023/BTS Maroquinerie - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond du meuble et celui du tiroir est modélisée en fonction du temps, avec une vitesse initiale négative lors de la fermeture. L'exercice étudie cette distance par une équation différentielle puis par l'analyse de la fonction obtenue, notamment son évolution, le temps de fermeture et sa position moyenne.

Partie A

Question 1. a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

Pour résoudre $r^2 + 5r + 4 = 0$, on calcule $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Comme $\Delta > 0$, il y a deux racines réelles distinctes. La formule quadratique donne $r = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2}$. On peut aussi factoriser le trinôme en $(r+1)(r+4)$, ce qui permet de vérifier directement les deux solutions.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les deux solutions réelles de l'équation caractéristique sont $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$.

Question 1. b. À l'aide de l'équation caractéristique et du tableau fourni, résoudre l'équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0.

L'équation caractéristique associée à $y'' + 5y' + 4y = 0$ est $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses deux racines sont réelles et distinctes : -1 et -4. D'après le tableau fourni, la solution générale est alors une combinaison linéaire des exponentielles associées à ces racines. Les constantes sont arbitraires et réelles. La solution s'entend sur l'intervalle de définition donné dans l'énoncé.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La solution générale est $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2. a. À partir de la distance initiale de 20 cm et de la vitesse initiale négative de -10 cm·s⁻¹, déterminer f(0) et f'(0).

Grandeur à l'instant initial	Valeur donnée
Distance OM	20 cm
Vitesse de déplacement	-10 cm·s^{-1}

La fonction f représente la distance OM, donc sa valeur à l'instant initial est la distance initiale. Sa dérivée représente la vitesse. Le signe négatif de cette vitesse correspond au rapprochement du point M vers le point O.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> À l'instant initial, $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2. b. En admettant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

La distance est donnée par $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. À deux secondes, on remplace simplement t par 2, ce qui donne $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$. Cette expression est la valeur exacte. Son approximation décimale permet de contrôler que la distance reste positive et a diminué par rapport aux 20 cm initiaux.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Après deux secondes, $OM = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8} \approx 3{,}1567$ cm.

Question 2. c. Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes et justifier.

La distance doit être strictement inférieure à $0{,}5$ cm. La fonction est décroissante sur $[0;+\infty[$, et son expression permet de calculer à quatre secondes :

- $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}4274$ cm ;
- donc $f(4) < 0{,}5$ cm.

Par continuité, la distance passe sous le seuil avant quatre secondes : l'affirmation du constructeur est justifiée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui : la distance passe sous $0{,}5$ cm avant 4 secondes, puisque $f(4) \approx 0{,}4274$ cm.

Partie B

Question 1. a. Pour f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ sur [0 ; +∞[, en utilisant la limite donnée de e⁻ᵘ, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.

On a $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, les deux exposants $-t$ et $-4t$ tendent vers $-\infty$. Ainsi, les deux exponentielles tendent vers zéro. La fonction étant une combinaison linéaire de ces exponentielles, sa limite est la combinaison correspondante de leurs limites. Les coefficients constants ne modifient pas cette conclusion.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La limite de la distance modélisée est nulle : $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

Question 1. b. **Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et vaut zéro. Une courbe représentative possède alors une asymptote horizontale d'équation $y = L$, où L est cette limite. Ici, $L = 0$. Cette droite est l'axe des abscisses, que la courbe approche lorsque le temps devient grand.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe admet pour asymptote horizontale l'axe des abscisses, d'équation $y = 0$.

Question 2. a. **Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.**

On dérive les deux termes de $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$ en utilisant $(e^{u(t)})' = u'(t)e^{u(t)}$. Pour le premier terme, l'exposant a pour dérivée -1. Pour le second, sa dérivée vaut -4, qui se multiplie par le coefficient $-\frac{10}{3}$. On obtient ainsi l'expression de f' pour tout $t \geq 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour tout $t \in [0; +\infty[$, $f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2. b. **Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, en déduire le tableau de variations de f sur cet intervalle.**

Puisque $f'(t) < 0$ sur l'intervalle, f y est strictement décroissante. La valeur initiale est $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$, et la limite en $+\infty$, déterminée à la question précédente, vaut zéro. Ces éléments donnent le tableau de variations suivant.

t	0		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	20	$\searrow$	0

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sur $[0; +\infty[$, f décroît strictement de 20 vers 0.

Question 3. a. **Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne numéro 36, en ajoutant des lignes si nécessaire, avec les valeurs de f(t) arrondies à 10^{-2} et la valeur de la condition à chaque étape, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.**

La boucle augmente t de $0{,}1$ à chaque passage et teste si $f(t) > 0{,}5$. Les valeurs de $f(t)$ sont arrondies au centième, mais la condition est évaluée avec la valeur non arrondie. Les dernières étapes sont :

Ligne	t	$f(t)$, au centième	Condition
36	$3{,}6$	$0{,}64$	VRAIE
37	$3{,}7$	$0{,}58$	VRAIE
38	$3{,}8$	$0{,}52$	VRAIE
39	$3{,}9$	$0{,}47$	FAUSSE

La condition devient fausse à la ligne 39 et la boucle s'arrête.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> À la ligne 39, $t = 3{,}9$ et la condition est fausse : l'algorithme s'arrête.

Question 3. b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter ce résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.

L'algorithme poursuit la boucle tant que la distance est supérieure à $0{,}5$ cm. À $t = 3{,}8$, elle vaut environ $0{,}52$ cm : la condition est vraie. Après l'incrément de $0{,}1$, elle vaut environ $0{,}47$ cm à $t = 3{,}9$: la condition devient fausse. La variable conserve alors cette dernière valeur.

Dans le contexte, l'algorithme repère donc le premier dixième de seconde où la distance est inférieure au seuil de fermeture.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La variable finale vaut $t = 3{,}9$ s : le tiroir est alors à moins de $0{,}5$ cm.

Question 4. La position moyenne du tiroir est définie par m = (1/4)∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer que m = 45/8 - (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.

On intègre terme à terme puis on divise par la durée 4 :

$$m = \frac{1}{4}\left[-\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}\right]_0^4.$$

En évaluant aux bornes, on obtient $m = \frac{1}{4}\left(\frac{45}{2} - \frac{70}{3}e^{-4} + \frac{5}{6}e^{-16}\right)$. La distribution de $\frac{1}{4}$ donne la formule demandée. La position moyenne est exprimée en centimètres.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La position moyenne vaut $m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16} \approx 5{,}5182$ cm.

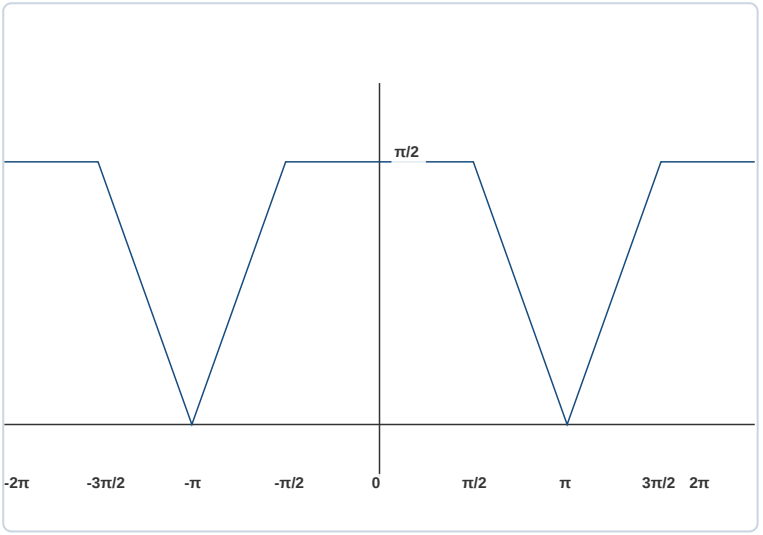
2. Séries de Fourier d'une fonction périodique paire

L'exercice étudie une fonction paire de période 2π, définie par morceaux sur [0 ; π] : elle vaut π/2 sur [0 ; π/2[et π - t sur [π/2 ; π]. Les questions portent sur son graphique, ses coefficients de Fourier, une somme partielle, la reconnaissance de sa courbe et l'erreur d'une approximation de la valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [-2π ; 2π], en utilisant sa définition par morceaux, sa parité et sa période.

Sur \,$[-2\pi ; 2\pi]$, le motif de période 2π est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. La fonction vaut $\pi/2$ sur les plateaux, puis décroît ou croît linéairement jusqu'aux minima nuls en $-\pi$ et π. En particulier, $f(0) = \pi/2$: l'origine n'est pas un zéro.

Graphe de f sur [-2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Le graphe est pair, de période 2π, avec des minima nuls en $-\pi$ et π, et $f(0) = \pi/2$.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

Le formulaire donne $b_n = \frac{2}{T} \int f(t) \sin(n\omega t)\, dt$ sur une période. On peut choisir l'intervalle $[-\pi ; \pi]$, puisque l'intégrande est périodique de période 2π. La fonction f est paire et $\sin(nt)$ est impaire, donc leur produit est impair. Son intégrale sur cet intervalle symétrique est nulle.

$b_n = 0$ pour tout entier $n \geq 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. **Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.**

La pulsation associée à une fonction périodique de période T est donnée par $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Ici, la période indiquée dans l'énoncé est $T = 2\pi$. Ainsi, $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$, en radians par unité de temps lorsque la variable est exprimée en radians.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\omega = 1$.

Question 4. **Démontrer que le coefficient de Fourier a_0 est égal à $3\pi/8$.**

Intervalle	Intégrale de f
$[0; \pi/2[$	$\frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$
$[\pi/2; \pi]$	$\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\, dt = \frac{\pi^2}{8}$

Comme f est paire et de période 2π, le formulaire donne $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\, dt$. En additionnant les deux contributions, on obtient $a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. **Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $a_n = \int_0^{\pi/2} \cos(nt)dt + (2/\pi)\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)dt$.**

La fonction est paire. D'après le formulaire, $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\, dt$. Avec $T = 2\pi$ et $\omega = 1$, cela devient $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\, dt$. On sépare l'intégrale en $[0; \pi/2[$ et $[\pi/2; \pi]$, puis on remplace $f(t)$ par son expression sur chacun de ces intervalles.

$$a_n = \int_0^{\pi/2} \cos(nt)\, dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\, dt.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_n = \int_0^{\pi/2} \cos(nt)\, dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\, dt$.

Question 6. **En admettant que $a_n = 2/(\pi n^2)(\cos(n\pi/2) - \cos(n\pi))$, déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.**

On substitue successivement $n = 1, 2, 3$ dans la formule admise $a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos(\frac{n\pi}{2}) - \cos(n\pi)\right)$. Les valeurs de cosinus correspondantes sont respectivement $(0, -1)$, $(-1, 1)$ et $(0, -1)$. La substitution donne les trois coefficients exacts suivants.

Coefficient	Valeur exacte
a_1	$\frac{2}{\pi}$
a_2	$-\frac{1}{\pi}$
a_3	$\frac{2}{9\pi}$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_1 = \frac{2}{\pi}, \quad a_2 = -\frac{1}{\pi}, \quad a_3 = \frac{2}{9\pi}.$

Question 7. Déduire des coefficients précédents que $s_3(t) = 3\pi/8 + (2/\pi)\cos(t) - (1/\pi)\cos(2t) + (2/(9\pi))\cos(3t)$.

La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))$, car $\omega = 1$. Les coefficients sinus sont nuls d'après la question 2. En remplaçant a_0, a_1, a_2, a_3 par les valeurs établies précédemment, on obtient directement l'expression de s_3.

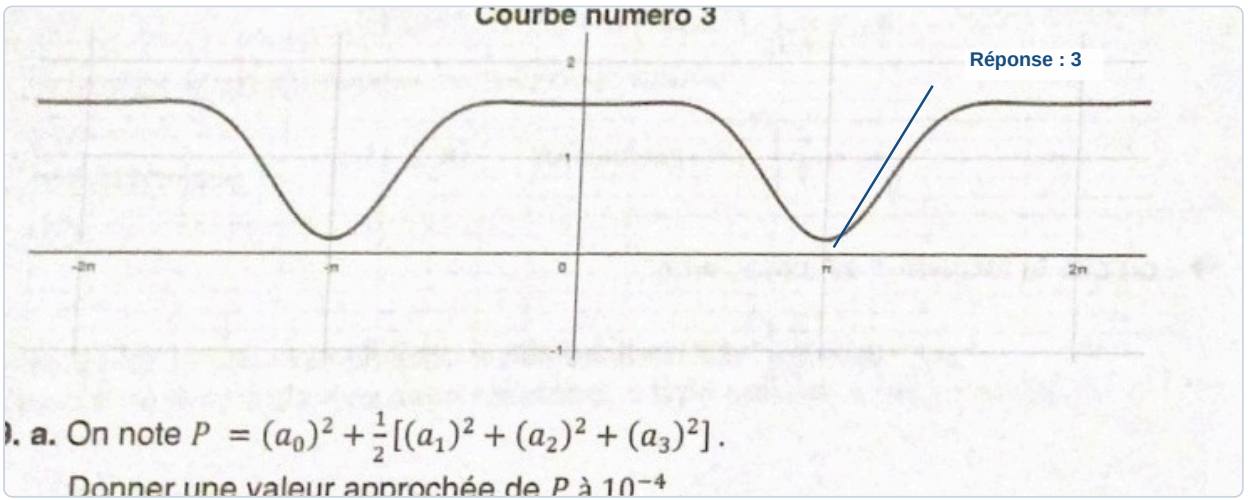
✓ RÉPONSE À RETENIR

$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t).$

Question 8. Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées correspond à la fonction s_3.

La somme partielle doit présenter des minima près de $t = \pm\pi$, tandis que ses maxima restent proches de $\pi/2$ autour de $t = 0$ et des multiples de 2π. Sur les trois propositions de la page, seule la courbe numéro 3 a cette forme.

Courbe correspondant à s_3



✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe numéro 3.

Question 9. a. **Pour P = $(a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.**

À partir de $a_0 = \frac{3\pi}{8}$, $a_1 = \frac{2}{\pi}$, $a_2 = -\frac{1}{\pi}$ et $a_3 = \frac{2}{9\pi}$, on obtient $P = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{4}{81\pi^2}\right) = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{409}{162\pi^2}$. L'arrondi au dix-millième est demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P \approx 1{,}6437$.

Question 9. b. **Sachant que $F^2 = \pi^2/6$ et que P constitue une approximation de F^2, déterminer le pourcentage d'erreur de cette approximation parmi les choix proposés : 0,1 %, 1 % ou 10 %. Une seule réponse est attendue, sans justification.**

L'erreur relative est $\frac{|P - F^2|}{F^2} \times 100$. Avec $P \approx 1{,}6437$ et $F^2 = \frac{\pi^2}{6}$, elle vaut environ $0{,}0739\,\%$. Parmi les choix proposés, cette valeur est la plus proche de $0{,}1\,\%$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

0,1 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, session 2023, code 23MATGRB2, dure 2 heures. Elle comporte deux exercices de 10 points et les coefficients sont 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et 2 en Électrotechnique. Elle étudie la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et analyse de fonction, puis les séries de Fourier d'une fonction périodique paire.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants se résout à partir des racines de son équation caractéristique.
- La limite d'une fonction à l'infini permet de déterminer une asymptote horizontale, et le signe de sa dérivée établit ses variations.
- La pulsation d'une fonction périodique de période T vaut $\omega = 2\pi/T$; pour une fonction paire, les coefficients sinus b_n sont nuls.
- La somme partielle de Fourier d'ordre n conserve les coefficients jusqu'à cet ordre : $s_n(t) = a_0 + \Sigma_{k=1}^{n}(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les conditions initiales f(0) et f'(0) lors de la détermination des constantes de la solution différentielle.
- Distinguer la distance exprimée en centimètres du temps exprimé en secondes et relier toute conclusion au seuil de fermeture.
- Dans l'algorithme, recalculer la condition après chaque incrémentation de t et poursuivre jusqu'à ce qu'elle devienne fausse.
- Pour Fourier, distinguer a_0 des autres coefficients et utiliser les formules adaptées à une fonction paire.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle de la fermeture du tiroir ?

On résout d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses racines donnent la forme générale de la solution de l'équation différentielle. On détermine ensuite les constantes avec les valeurs initiales f(0) et f'(0).

Q : Comment trouver la pulsation utilisée dans le développement de Fourier ?

La pulsation se calcule avec la relation $\omega = 2\pi/T$, où T est la période. Pour cette fonction, $T = 2\pi$. Comme la fonction est paire, les coefficients b_n associés aux sinus sont nuls.

Q : Comment gérer le temps pendant cette épreuve ?

L'épreuve dure deux heures et comprend deux exercices de 10 points. Répartissez votre temps entre les deux exercices, en réservant une marge pour les justifications, les calculs numériques et la vérification des réponses.

Q : Quels arrondis et critères faut-il respecter dans les réponses ?

Donnez les valeurs exactes lorsqu'elles sont demandées, arrondissez P à 10^{-4} près et les valeurs du tableau de l'algorithme à 10^{-2}. Pour la question à choix multiples, une seule réponse est attendue, sans justification.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmaroquinerie.fr/assets/annales/bts-maroquinerie/E2 - Mathématiques/2023/BTS Maroquinerie - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Maroquinerie : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.